

# ASPETTI MATEMATICI DELLA MECCANICA QUANTISTICA - FM450

## Programma del corso

- Crisi della Fisica Classica: radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton, spettri di assorbimento ed emissione, de Broglie e la dualità onda/particella, interferenza da doppia fenditura. Richiami di Meccanica Classica (formulazioni di Newton, Lagrange, Hamilton) ed elettromagnetismo, stati e osservabili in Meccanica Classica. Formulazione dell'equazione di Schrödinger con analogia ottica, conservazione della probabilità, interpretazione di Born. Operatori posizione e momento, commutatore, teorema di Ehrenfest, principio di indeterminazione di Heisenberg. Postulati di von Neumann per la meccanica quantistica, il problema del collasso della funzione d'onda.
- Spazi di Hilbert: proprietà geometriche e topologiche, proiezioni su sottospazi chiusi, lemma di Riesz, basi ortonormali, espansione di Fourier e identità di Parseval. Notazione bra-ket. Somma diretta e prodotto tensore di spazi di Hilbert.
- Teoria delle distribuzioni: funzioni test (topologia finale), distribuzioni di Schwarz come duale topologico delle funzioni test, convergenza debole, derivata debole e formulazione debole di problemi differenziali. Distribuzioni temperate, trasformata di Fourier e unitarietà in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Spazi di Sobolev: definizione e caratterizzazione in trasformata di Fourier, teoremi di immersione, operatore traccia, un teorema di regolarità ellittica.
- Operatori in spazi di Hilbert: dominio, nucleo, immagine, grafo, operatori limitati, operatori invertibili, estensioni e restrizioni, operatori chiusi, operatori aggiunti. Operatori simmetrici e auto-aggiunti. Relazione di indeterminazione per operatori simmetrici. Criteri di auto-aggiunzione, teorema di Kato-Rellich, operatori positivi, forme quadratiche e teorema KLMN. Isometrie e operatori unitari, trasformata di Cayley, spazi di difetto ed estensioni autoaggiunte, criterio di von Neumann. Risolvente e spettro, prima e seconda identità di risolvente, successioni di Weyl. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti: calcolo funzionale, misure spettrali, proiettori spettrali (PVM). Spettro puntuale, assolutamente continuo, singolare continuo; spettro essenziale e discreto, operatori compatti e criterio di Weyl per lo spettro essenziale. Gruppi unitari fortemente continui e teorema di Stone, rappresentazione di Schrödinger e Heisenberg della dinamica, relazioni di Weyl per operatori posizione e momento.
- Sistemi a una particella esattamente risolubili.
  - (a) *Particella libera*. Dominio di autoaggiunzione dell'Hamiltoniana, spettro puramente assolutamente continuo. Proiettori spettrali, operatore risolvente, gruppo unitario, stime dispersive. Dinamica di pacchetti d'onda in dimensione  $d = 1$  (valori medi e dispersioni di posizione e momento, interferenza).
  - (b) *Oscillatore armonico*. operatori di creazione e distruzione, dominio di autoaggiunzione e spettro puramente puntuale dell'Hamiltoniana. Criterio di Rellich per lo spettro puntuale. Valori di aspettazione di posizione e momento (teorema di Ehrenfest). Generalizzazione a oscillatori in dimensione finita arbitraria.
  - (c) *Atomo di idrogeno*. Hamiltoniana quantistica e fattorizzazione del centro di massa. Dominio di autoaggiunzione e limitatezza dal basso, Lemma di Sobolev e criterio di Kato. Disuguaglianza di Hardy e stima per il ground state. Spettro essenziale, teorema del viriale, spettro puntuale. Coordinate polari, momento angolare e sue proprietà spettrali. Livelli energetici e stati legati. Cenno al problema della degenerazione accidentale e la simmetria  $SO(4)$  (vettore di Laplace-Runge-Lenz).
- Teoria dello scattering. Motivazioni e problematiche. Scattering da potenziale in Meccanica Classica, sezione d'urto differenziale e totale. Stati legati, stati di scattering e stati asintoticamente liberi in Meccanica Quantistica, operatori d'onda e operatore di scattering. Completezza debole, forte e asintotica. Intertwining, chain rule e criterio di completezza. Metodi 'time-dependent': teoremi di Cook e Hack-Cook (esistenza operatori d'onda). Metodi 'classe traccia' (teoria di Birman-Kuroda): definizione e proprietà di operatori classe traccia e Hilbert-Schmidt, teorema di Pearson, teoremi di Kato-Rosenblum e Birman-Kuroda, teorema di Birman, principio di invarianza, applicazione a scattering da potenziale (esistenza e completezza degli operatori d'onda). Completezza asintotica: criterio per l'assenza di spettro singolare e potenziali di Rollnik. Metodi stazionari (cenni): operatori d'onda abeliani, autofunzioni generalizzate, principio di assorbimento limite, equazione di Lippmann-Schwinger e serie di Born per la matrice di trasferimento.

## Principali riferimenti bibliografici

1. M. Correggi, *Mathematics of Quantum Mechanics* (lecture notes), reperibile sul sito: <https://sites.google.com/view/michele-correggi/teaching>
2. V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics*, Springer UNITEXT (2017).
3. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics - Vol. I & III*, Academic Press (1981).
4. A. Teta, *A Mathematical Primer on Quantum Mechanics*, Springer (2018).