RELATIVITA' SPECIALE

Referenze per esercizi:

- Rindler, Introduction to Special Relativity
- Rowe, Geometrical Physics in Minkowski Spacetime
- Forshaw, Smith, Dynamics and Relativity
- Schutz, A First Course in General Relativity (ch. 1-4)
- Carroll, Spacetime and Geometry (ch 1)
- Hartle, Gravity: an Introduction to Einstein's General Relativity (ch 4,5)
- Rindler, Relativity: Special, General and Cosmological
- Kamal, 1000 Solved Problems in Modern Physics (ch.6)
- Baglio, Bethermin, Acceleration in Special Relativity...
- Garcia-Islas, the 4 Particles Paradox in Special Relativity (arXiv: 1412.2057)

(John Baez webpage: math.ucr.edu/home/baez/physics/index.html
↳ Special Relativity → What is the experimental basis of SR?)

Urti (elastici/anelastici) tra particelle

I fenomeni più studiati che richiedono l'utilizzo della relatività speciale riguardano la dinamica di particelle interagenti in moto a grandi velocità.

Tenere presente che:

- $c = 1$: velocità della luce $\Rightarrow$ $1s \simeq 3 \cdot 10^8 m$
- $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$: fattore di Lorentz

  $x \cdot y = \eta(x,y) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3$

- $\eta = (\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}} = diag(1,-1,-1,-1)$: metrica di Minkowski
  (NB: in letteratura si usa anche $\eta = diag(-1,-1,-1,1)$, $\eta = diag(-1,1,1,1)$)
- $p = (p^\mu) = m\gamma(v)(1,\vec{v}) = mu$: 4-momento di una particella con
  m = massa a riposo, $\vec{v}$ = velocità (u = 4-velocità)

  $k = (k^\mu) = \hbar(\omega, \vec{k}) = \hbar(|\vec{k}|, \vec{k})$: 4-momento di una particella con massa a riposo nulla ("fotone"),
  ω = frequenza, $\vec{k}$ = vettore d'onda ($\omega = c|\vec{k}| = |\vec{k}|$)

  MQ $\leftarrow$ $\hbar = h/2\pi$ = cost. Planck ridotta $\simeq 10^{-34} J \cdot s \simeq 7 \cdot 10^{-16} eV \cdot s$

- $|p|^2 \equiv p \cdot p \equiv \eta(p,p) \overset{(*)}{\equiv} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \equiv p_\nu p^\nu$: (pseudo-) norma Lorentziana di $p = (p^\mu)$
  - (*) notazione di Einstein: $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu := \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$
  - Componenti p^μ dipendono da sistema di riferimento, $|p|^2$ é invariante
    ($|p|^2 = \eta(p,p) = \eta(\Lambda p, \Lambda p)$ $\rightsquigarrow$ Λ = trasf. che lasciano invariato $\eta(\cdot,\cdot)$)

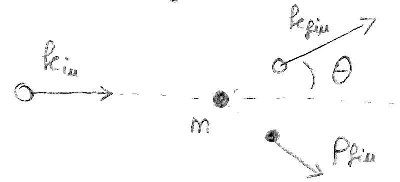
$$|p|^2 = \begin{cases} >0 & \to p \text{ é di "tipo tempo"} \\ =0 & \to p \text{ é di "tipo luce"} \\ <0 & \to p \text{ é di "tipo spazio"} \end{cases} \quad (\text{cf. } \eta = diag(1,-1,-1,-1))$$

  - $m \neq 0 \Rightarrow |p|^2 = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = m\gamma(v)(1,\vec{v})\begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix}\left[m\gamma(v)\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix}\right] = m^2\gamma(v)^2(1-|\vec{v}|^2) = m^2 > 0$
    ↳ tipo tempo

    $m = 0 \Rightarrow |k|^2 = k^\mu \eta_{\mu\nu} k^\nu = \hbar(|\vec{k}|, \vec{k})\begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix}\left[\hbar\begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \vec{k} \end{pmatrix}\right] = \hbar^2(|\vec{k}|^2 - \vec{k}\cdot\vec{k}) = 0$
    ↳ tipo luce.

- $\sum_i p_i^\mu$ = cost : conservazione 4-momento totale
  $\mu = 0 \Rightarrow \sum_i E_i$ = cost : conserv. energia totale ; $\mu \in \{1,2,3\} \Rightarrow \sum_i \gamma(v_i) m \vec{v}_i$ = cost. : conserv. momento totale.

Es 1) Scattering di Compton: urto elastico fotone-particella



Scelgo un sistema di riferimento inerziale solidale con la particella prima dell'urto

$p_i^\mu = (m, \vec{0}) \longrightarrow p_f^\mu = m\gamma(v_f)(1, \vec{v}_f)$

$k_i^\mu = \hbar(|\vec{k}_i|, \vec{k}_i) \qquad k_f^\mu = \hbar(|\vec{k}_f|, \vec{k}_f) \qquad (|k_f| = \omega_f)$

Conservazione 4-momento: $p_i^\mu + k_i^\mu = p_f^\mu + k_f^\mu \quad \mu \in \{0,1,2,3\}$

NB: Sistema non-lineare (per via di $\gamma(v_f)$) di 4 eq. $\to$ difficile in teoria

↳ Uso l'invarianza delle pseudo-norme per semplificare

$$p_f = p_i + k_i - k_f \Rightarrow |p_f|^2 = |p_i + k_i - k_f|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{p_f \cdot p_f}}_{=m^2} = \underbrace{\cancel{p_i \cdot p_i}}_{=m^2} + \underbrace{\cancel{k_i \cdot k_i}}_{=0} + \underbrace{\cancel{k_f \cdot k_f}}_{=0} + 2p_i \cdot k_i - 2p_i \cdot k_f - 2k_i \cdot k_f$$

$$\Rightarrow 0 = \cancel{2}(m \cdot \hbar|\vec{k}_i|) - \cancel{2}(m \cdot \hbar|\vec{k}_f|) - 2\hbar^2(|\vec{k}_i||\vec{k}_f| - \vec{k}_i \cdot \vec{k}_f) \quad \wedge \quad \vec{k}_i \cdot \vec{k}_f = |\vec{k}_i||\vec{k}_f|\cos\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{k}_i| - |\vec{k}_f| = \frac{\hbar}{m}(|\vec{k}_i||\vec{k}_f|)(1 - \cos\theta) \quad \wedge \quad |\vec{k}| = \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\omega_f} - \frac{1}{\omega_i} = \frac{\hbar}{m}(1 - \cos\theta)} \quad \wedge \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

ripristino c

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)}$$

(h/mc = lunghezza d'onda di Compton associata alla particella)

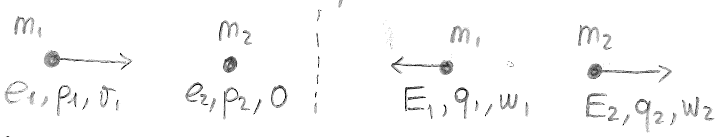
$h/c = 2\pi \cdot 7 \cdot 10^{-16}\,\text{eV} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m} = 1.32 \cdot 10^{-6}\,\text{eV}\cdot\text{m}$

$m_e = 0{,}3\,\text{MeV} = 3 \cdot 10^5\,\text{eV} \Rightarrow \lambda_e = 4{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{m}$

$\lambda_{vis} = 5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ (500nm)

Es 2) Scattering elastico tra particelle

- Consideriamo il caso di urto rettilineo in 1D
- Le masse a riposo si conservano.



$p_1^\mu = (e_1, p_1) \;|\; q_1^\mu = (E_1, q_1)$

$p_2^\mu = (m_2, 0) \;|\; q_2^\mu = (E_2, q_2)$

Conservazione 4-momento: $p_1^\mu + p_2^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu$ $\left(\begin{array}{l} E = m\gamma, \; q = m\gamma w \\ m^2 + q^2 = m^2(1 + \gamma^2 w^2) = m^2\gamma^2 = E^2 \end{array} \right)$

1. $q_1 = p_1 + p_2 - q_2 \Rightarrow |q_1|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 + |q_2|^2 + 2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_2)$

$$\Rightarrow \cancel{m_1^2} = \cancel{m_1^2} + m_2^2 + m_2^2 + 2\left[(m_1\gamma(v_1)m_2) - (m_1\gamma(v_1)m_2\gamma(w_2)(1 - v_1 w_2)) - (m_2 m_2 \gamma(w_2))\right]$$

$$\Rightarrow 0 = m_2 + m_1\gamma(v_1) - (m_1\gamma(v_1) - m_1\gamma(v_1)v_1 w_2 + m_2)\gamma(w_2)$$

$$\Rightarrow (m_2 + m_1\gamma(v_1))\sqrt{1 - w_2^2} = m_2 + m_1\gamma(v_1) - m_1\gamma(v_1)v_1 w_2 \quad \wedge$$

Elevo al quadrato e risolvo per w_2

$$\Rightarrow w_2 = 0 \longrightarrow \nexists \text{ urto}$$

$$w_2 = \frac{2m_1\gamma(v_1)v_1(m_2 + m_1\gamma(v_1))}{(m_1\gamma(v_1)v_1)^2 + (m_2 + m_1\gamma(v_1))^2} = \frac{2p_1(m_2 + e_1)}{p_1^2 + (m_2 + e_1)^2}$$

$$\gamma(w_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - w_2^2}} = \frac{p_1^2 + (m_2 + e_1)^2}{(m_2 + e_1)^2 - p_1^2}$$

$$q_2 = m_2\gamma(w_2)w_2 = \frac{2m_2 p_1(m_2 + e_1)}{m_2^2 + m_1^2 + 2me_1}, \quad q_1 = p_1 - q_2 = \frac{p_1(m_1^2 - m_2^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 e_1}$$

Limite classico ($c = 1$): $v_1 = v_1/c \to 0^+$

$$\gamma(v_1) = 1 + O(v_1^2), \qquad w_2 = \frac{2m_1 v_1(m_2 + m_1)}{O(v_1^2) + (m_2 + m_1)^2} = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

2. $$\begin{array}{l} \mu=0: \\ \mu=1: \end{array}\begin{cases} e_1+m_2 = E_1+E_2 \\ p_1 = q_1+q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1+m_2 = \sqrt{m_1^2+q_1^2}+\sqrt{m_2^2+q_2^2} \\ q_1 = p_1 - q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1+m_2-\sqrt{m_2^2+q_2^2} = \sqrt{m_1^2+(p_1-q_2)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{e_1^2}+m_2^2+(m_2^2+\cancel{q_2^2})+2e_1m_2-2(e_1+m_2)\sqrt{m_2^2+q_2^2} = \cancel{m_1^2}+\cancel{p_1^2}+\cancel{q_2^2}-2p_1q_2$$

$$\Rightarrow m_2^2+e_1m_2+p_1q_2 = (e_1+m_2)\sqrt{m_2^2+q_2^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{m_2^4}+\cancel{e_1^2m_2^2}+p_1^2q_2^2+\cancel{2m_2^3e_1}+2m_2^2p_1q_2+2e_1m_2p_1q_2 =$$
$$= \cancel{e_1^2m_2^2}+e_1^2q_2^2+\cancel{m_2^4}+m_2^2q_2^2+\cancel{2e_1m_2^3}+2e_1m_2q_2^2$$

$$\Rightarrow (e_1^2+m_2^2+2e_1m_2-p_1^2)\,q_2^2 = 2m_2p_1(m_2+e_1)q_2$$

$$\Rightarrow q_2=0 \quad \vee \quad q_2 = \frac{2m_2p_1(m_2+e_1)}{m_1^2+m_2^2+2e_1m_2}$$

NB: tutti passaggi semplici, ma scegliere l'ordine giusto è complicato.
↳ Non è un metodo risolutivo molto generale.

3. In generale conviene considerare un sistema di riferimento analogo a quello del centro di massa (CM).

. Difficile definire CM in relatività speciale → Tante generalizzazioni, tutte plausibili del concetto classico.

. Da un punto di vista operativo/computazionale conviene considerare il sistema di riferimento in cui il 3-momento totale è nullo
↳ "Zero Momentum Frame" (ZM-frame)

$$P^\mu_{TOT} = p_1^\mu + p_2^\mu =: M\,U^\mu_{ZM}$$

M = massa efficace totale
U^μ_{ZM} = versore di tipo tempo: $|U_{ZM}|^2 = 1$ (somma di vettori dello stesso tipo)

$$ZM \Rightarrow U^\mu_{ZM} = (1,\vec{0}) \iff \vec{p}_1+\vec{p}_2 = \vec{0}.$$

Energia delle particelle in ZM-frame: (NB: $U^\mu_{ZM} = (1,\vec{0})$)

$$E_1' = q_1\cdot U_{ZM} = \frac{q_1\cdot(q_1+q_2)}{M} = \frac{|q_1|^2+q_1q_2}{M} = \frac{m_1^2+[(q_1+q_2)\cdot(q_1+q_2)-|q_1|^2-|q_2|^2]/2}{M}$$
$$= \frac{m_1^2+[M^2-m_1^2-m_2^2]/2}{M} = \frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}$$

$$E_2' = \frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2M} = \frac{M^2-(m_1^2-m_2^2)}{2M}$$

$\Rightarrow$ E_1', E_2' dipendono solo dalle masse; Urto elastico $\Rightarrow$ masse invarianti $\Big\}\Rightarrow E_1', E_2'$ invarianti $\Downarrow$

3-momenti: $|\vec{q}_i'| = \sqrt{E_i'^2-m_i^2}$ $\Rightarrow |\vec{q}_i'|$ invarianti $\Downarrow$

3-velocità: $|\vec{w}_i'| = \dfrac{m\gamma(w_i')|\vec{w}_i'|}{m\gamma(w_i')} = \dfrac{|\vec{p}_i'|}{E_i'}$ $\Rightarrow |\vec{v}_i'|$ invarianti

In particolare, per urti rettilinei le velocità delle particelle cambiano semplicemente segno durante l'urto

$$|\vec{v}_{ZM}| = \frac{|\vec{p}_{ZM}|}{E_{ZM}} = \frac{|\vec{p}_1+\vec{p}_2|}{e_1+e_2} = \frac{m_1\gamma(v_1)v_1}{m_1\gamma(v_1)+m_2} = v_{ZM}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1-v_{ZM}}{1-v_1v_{ZM}} = \frac{v_1\left(1-\frac{m_1\gamma(v_1)}{m_1\gamma(v_1)+m_2}\right)}{1-v_1^2\frac{m_1\gamma(v_1)}{m_1\gamma(v_1)+m_2}} = \frac{v_1\,m_2/\cancel{(m_1\gamma(v_1)+m_2)}}{(m_1\gamma(v_1)(1-v_1^2)+m_2)/\cancel{(m_1\gamma(v_1)+m_2)}}$$

$$= \frac{m_2v_1}{m_1\gamma(v_1)^{-1}+m_2} = \frac{m_2\gamma(v_1)v_1}{m_1+m_2\gamma(v_1)} \quad \Bigg\| \quad v_2' = \frac{v_2-v_{ZM}}{1-v_2v_{ZM}} = -v_{ZM}$$

$w_1' = -v_1'$, $w_2' = -v_2'$

$$w_1 = \frac{w_1'+v_{ZM}}{1+w_1' v_{ZM}} = \frac{-v_1'+v_{ZM}}{1-v_1' v_{ZM}} = -\frac{v_1'-v_{ZM}}{1-v_1'v_{ZM}} = -\frac{\frac{m_2\gamma(v_1)v_1}{m_1+m_2\gamma(v_1)} - \frac{m_1\gamma(v_1)v_1}{m_1\gamma(v_1)+m_2}}{1-\frac{m_2 m_1 \gamma(v_1)^2 v_1^2}{(m_1+m_2\gamma(v_1))(m_1\gamma(v_1)+m_2)}} =$$

$$= \frac{m_1\gamma(v_1)v_1(m_1+\cancel{m_2\gamma(v_1)}) - m_2\gamma(v_1)v_1(\cancel{m_1\gamma(v_1)}+m_2)}{m_1^2\gamma(v_1)+m_1m_2+m_1m_2\gamma(v_1)^2+m_2^2\gamma(v_1)} = \frac{(m_1^2-m_2^2)\gamma(v_1)v_1}{m_1m_2(1+\gamma(v_1)^2)+(m_1^2+m_2^2)\gamma(v_1)}$$

$$w_2 = \frac{w_2'+v_{ZM}}{1+w_2'v_{ZM}} = \frac{-v_2'+v_{ZM}}{1-v_2'v_{ZM}} = \frac{2v_{ZM}}{1+v_{ZM}^2} = \frac{2m_1\gamma(v_1)v_1/\cancel{(m_1\gamma(v_1)+m_2)}}{(m_1^2\gamma(v_1)^2+m_2^2+2m_1m_2\gamma(v_1)+m_1^2\gamma(v_1)^2v_1^2)/(m_1\gamma(v_1)+m_2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{2m_1\gamma(v_1)v_1(m_1\gamma(v_1)+m_2)}{(m_1\gamma(v_1)v_1)^2+(m_1\gamma(v_1)+m_2)^2} \quad ✓$$

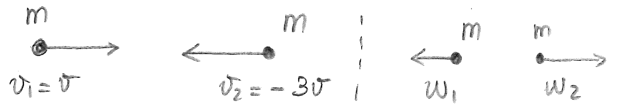
NB: $m_1 = m_2 = m \Rightarrow w_1 = 0$

$$w_2 = \frac{2\cancel{m^2}\gamma(v_1)(1+\gamma(v_1))v_1}{\cancel{m^2}(\gamma(v_1)^2v_1^2+\gamma(v_1)^2+1+2\gamma(v_1))} = \left(\cdot\frac{\gamma(v_1)^{-2}}{\gamma(v_1)^{-2}}\right)$$

$$= \frac{2v_1(1+\gamma(v_1)^{-1})}{1+v_1^2+\gamma(v_1)^{-2}+2\gamma(v_1)^{-1}} = \frac{\cancel{2}v_1(1+\gamma(v_1)^{-1})}{\cancel{2}(1+\gamma(v_1)^{-1})} = v_1$$

→ Come nel caso classico, ma qui è un risultato relativistico

Es 3)



$$v_{ZM} = \frac{|p_1+p_2|}{E_1+E_2} = \frac{|\cancel{m}\gamma(v_1)v_1+\cancel{m}\gamma(v_2)v_2|}{\cancel{m}\gamma(v_1)+\cancel{m}\gamma(v_2)} = \frac{(\gamma(v)-3\gamma(3v))v}{\gamma(v)+\gamma(3v)}$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1-v_{ZM}}{1-v_1v_{ZM}} = \frac{v\left(1-\frac{\gamma(v)-3\gamma(3v)}{\gamma(v)+\gamma(3v)}\right)}{1-v^2\frac{\gamma(v)-3\gamma(3v)}{\gamma(v)+\gamma(3v)}} = \frac{4\gamma(3v)v}{(1-v^2)\gamma(v)+(1+3v^2)\gamma(3v)} = \frac{4v}{1+3v^2+\gamma(v)^{-1}\gamma(3v)^{-1}}$$

$$v_2' = \frac{v_2-v_{ZM}}{1-v_2v_{ZM}} = -\frac{4v}{1+3v^2+\gamma(v)^{-1}\gamma(3v)^{-1}} = -v_1'$$

$\Rightarrow w_1' = -v_1' = v_2'$, $w_2' = -v_2' = v_1'$

$\Rightarrow w_1 = \frac{w_1'+v_{ZM}}{1+w_1'v_{ZM}} = \frac{v_2'+v_{ZM}}{1+v_2'v_{ZM}} = v_2$ → le particelle si scambiano

$w_2 = \frac{w_2'+v_{ZM}}{1+w_2'v_{ZM}} = \frac{v_1'+v_{ZM}}{1+v_1'v_{ZM}} = v_1$ → le velocità come nel caso classico (fondamentale: masse uguali)

Urti anelastici e decadimenti

Es 4) Assorbimento di un fotone: a) È possibile che dopo l'assorbimento, le particelle abbia la stessa massa a riposo?
b) Determinare massa e velocità della particella dopo l'assorbimento

$p_i^\mu = (M,\vec 0)$, $k_i^\mu = \hbar(|\vec k_i|,\vec k_i)$ → $p_f^\mu = p_i^\mu + k_i^\mu$ (conservazione 4-momento)

a) $p_f^\mu = M\gamma(v)(1,\vec v)$

$\Rightarrow |p_f|^2 = |p_i|^2+|k_i|^2+2p_i\cdot k_i \Rightarrow \cancel{M^2} = \cancel{M^2}+0+2M\hbar|\vec k_i| \Rightarrow M=0 \vee |\vec k_i|=0$

$\Rightarrow$ Non è possibile che dopo l'assorbimento la particella abbia la stessa massa a rip.

b) $p_f^\mu = \tilde M\gamma(v)(1,\vec v)$

$\Rightarrow \vec v = \frac{\tilde M\gamma(v)\vec v}{\tilde M\gamma(v)} = \frac{\vec p_i+\hbar\vec k_i}{M+\hbar|\vec k_i|} = \frac{\hbar\vec k_i}{M+\hbar|\vec k_i|}$

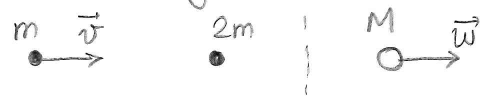
$\Rightarrow |p_f|^2 = |p_i|^2+|k_i|^2+2p_i\cdot k_i \Rightarrow \tilde M^2 = M^2+2M\hbar|\vec k_i| = M^2\left(1+\frac{2\hbar|\vec k_i|}{M}\right) \Rightarrow \tilde M \simeq M+\hbar\,\overset{\omega}{\overset{\|}{|\vec k_i|}}$

Es: $M = M_H = 938$ MeV

$\lambda = 1215.7\cdot 10^{-10}$ m (UV) $\Rightarrow \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} \sim \frac{2\pi\cdot 3\cdot 10^8\, s^{-1}}{1215.7\cdot 10^{-10}} = 1.5\cdot 10^{16}\,\frac{1}{s}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\tilde M - M}{M} \sim \frac{10.8\text{ eV}}{10^9\text{ eV}} \sim 10^{-8}$

(eV = 1qe · 1Volt = $1.6\cdot 10^{-19}$ J)

Es 5) Scattering anelastico tra particelle



$$p_1^\mu = m\gamma(v)(1,\vec{v}) \quad ; \quad q^\mu = M\gamma(w)(1,\vec{w})$$
$$p_2^\mu = 2m(1,0)$$

Conservazione 4-momento $\Rightarrow$ $p_1^\mu + p_2^\mu = q^\mu$ $\leftarrow$ ZM-frame

- $\begin{cases} m\gamma(v) + 2m = M\gamma(w) \\ m\gamma(v)\vec{v} = M\gamma(w)\vec{w} \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \dfrac{m\gamma(v)\vec{v}}{m\gamma(v)+2m} = \dfrac{\vec{v}}{1+2\gamma(v)^{-1}}$
- $|q|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 + 2p_1\cdot p_2 \Rightarrow M^2 = m^2 + (2m)^2 + 2(m\gamma(v))(2m) = m^2(5+4\gamma(v))$

$$\Rightarrow M = m\sqrt{5+4\gamma(v)}$$

(Equiv: $M^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = (M\gamma(w))^2 - |M\gamma(w)\vec{w}|^2 = (m\gamma(v)+2m)^2 - |m\gamma(v)\vec{v}|^2$)

- Limite classico: $|\vec{v}| \to 0^+$: $\vec{w} \sim \vec{v}/3$, $M \sim m\sqrt{5+4} = 3m$
- Calcolo classico: $M = m + 2m = 3m$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + 2m\, x_2}{m+2m} = \frac{x_1 + 2x_2}{3} \Rightarrow v_{CM} = \frac{v_1 + 2v_2}{3} = \frac{v}{3} \checkmark$$

NB: per inversione temporale descrivo il procedimento inverso in cui M decade in m, 2m.

Es 6) Dimostrare che due particelle identiche che si urtano con velocità uguali e opposte non possono annichilire e creare un fotone.

$$p_1^\mu = m\gamma(v)(1,\vec{v}) \longrightarrow k^\mu = \hbar(|\vec{k}|,\vec{k})$$
$$p_2^\mu = m\gamma(v)(1,-\vec{v})$$

$p_1^\mu + p_2^\mu = k^\mu \Rightarrow |k|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 + 2p_1\cdot p_2$

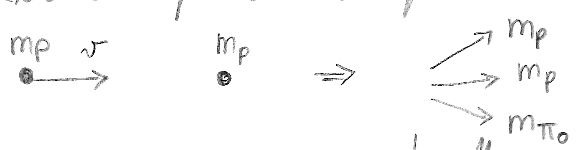
$$\Rightarrow 0 = m^2 + m^2 + 2m^2\gamma(v)^2(1 - \vec{v}\cdot(-\vec{v})) = 2m^2(1+\gamma(v)^2(1+|\vec{v}|^2)) > 0 \quad \lightning$$

Dimostrare che lo stesso risultato vale per velocità diverse:

$$0 = m^2 + m^2 + 2m^2\gamma(v_1)\gamma(v_2)\underbrace{(1 - \underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}_{<1})}_{>0} > 0 \quad \lightning$$

Es 7) Dall'urto di due protoni emerge un pione, oltre i due protoni. Determinare l'energia minima che uno dei protoni iniziali deve avere nel sistema di riferimento in cui l'altro è fermo affinché il processo sia possibile.

$m_p = 938$ MeV
$m_\pi = 135$ MeV



Energia minima $\Leftrightarrow$ particelle prodotte ferme nel ZM-frame

$$p_1^\mu + p_2^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu + k^\mu = p_{TOT}^\mu$$

- Finale in ZM-frame

$$|p_{TOT}|^2 = |q_1|^2 + |q_2|^2 + |k|^2 + 2(q_1\cdot q_2 + q_1\cdot k + q_2\cdot k) =$$
$$= m_p^2 + m_p^2 + m_\pi^2 + 2(m_p^2 + m_p m_\pi + m_p m_\pi) = 4m_p^2 + m_\pi^2 + 4m_p m_\pi$$

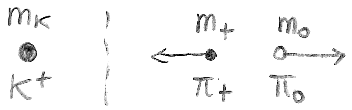
- Iniziale in ZM-frame

$$|p_{TOT}|^2 = |p_1|^2 + |p_2|^2 + 2p_1\cdot p_2 = m_p^2 + m_p^2 + 2m_p\cdot E_p = 2m_p^2 + 2m_p E_p$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{2m_p^2 + m_\pi^2 + 4m_p m_\pi}{2m_p} \simeq 1196 \text{ MeV}$$

$$\Rightarrow E_p = m_p\gamma(v) \Rightarrow v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{m_p^2}{E_p^2}} \simeq 0.62\,c$$

Es 8) Decadimento di una particella



$m_K = 493.9$ MeV
$m_+ = 139.6$ MeV
$m_0 = 135.0$ MeV

$$p_K = p_+ + p_0 \Rightarrow \begin{cases} m_K = m_+\gamma(v_+) + m_0\gamma(v_0) \\ \vec{0} = m_+\gamma(v_+)\vec{v}_+ + m_0\gamma(v_0)\vec{v}_0 \end{cases} : \quad \begin{matrix} E_K = E_+ + E_0 & (E) \\ 0 = \vec{p}_+ + \vec{p}_0 & (P) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m_+^2 = E_+^2 - |\vec{p}_+|^2 \\ m_0^2 = E_0^2 - |\vec{p}_0|^2 \end{cases} \Rightarrow m_+^2 - m_0^2 = (E_+^2 - E_0^2) - (|\vec{p}_+|^2 - |\vec{p}_0|^2)$$

$$\underbrace{(E_+ + E_0)}_{= E_K\ (E)}(E_+ - E_0) = (m_+ + m_0)(m_+ - m_0) + \cancel{(|\vec{p}_+| + |\vec{p}_0|)}\underbrace{(|\vec{p}_+| - |\vec{p}_0|)}_{=0\ (P)}$$

$$m_K(E_+ - E_0) = m_+^2 - m_0^2$$

$$\begin{cases} E_+ + E_0 = m_K \\ E_+ - E_0 = \dfrac{m_+^2 - m_0^2}{m_K} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_+ = \dfrac{m_K}{2} + \dfrac{m_+^2 - m_0^2}{2m_K} = 248.2 \text{ MeV} \\ E_0 = \dfrac{m_K}{2} - \dfrac{m_+^2 - m_0^2}{2m_K} = 245.2 \text{ MeV} \end{matrix}$$

- $E_* = m_*\gamma(v_*) \Rightarrow |\vec{v}_*| = \sqrt{1 - \dfrac{m_*^2}{E_*^2}} \Rightarrow \begin{matrix} |\vec{v}_+| = 0.82\,c \\ |\vec{v}_0| = 0.84\,c \end{matrix}$

- Energia cinetica efficace: $T_+ := E_+ - m_+ = 108.6$ MeV
  (Sperimentalmente: $T_+ = 107.7 \pm 1.0$ MeV).